e-ISSN: 3039 - 3145
Tạp chí Khoa học và Công nghệ Y khoa, 2026, 06, 077-080

ỨNG DỤNG PHƯƠNG TRÌNH EULER-LAGRANGE ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN CỰC TIỂU HÓA TỔN THẤT ĐIỆN NĂNG DO NHIỆT TRONG PHẦN ỨNG CỦA ĐỘNG CƠ DÒNG ĐIỆN MỘT CHIỀU

Nguyễn Tiến Dũng[1*], Nguyễn Sỹ Hồng Đức[2]

[1]*Trường Đại học Lương Thế Vinh. Số 9 Đường Cầu Đông, Phường Nam Định, tỉnh Ninh Bình, Việt Nam,*
[2]*Đại học Bách khoa Hà Nội*
[*]*Tác giả liên hệ: nguyentiendung@ltvu.edu.vn; tiendung.bmstu@bk.ru*

THÔNG TIN BÀI BÁO

Ngày nhận: 16/08/2026
Ngày hoàn thiện: 26/08/2026
Ngày chấp nhận: 06/09/2026
Ngày đăng: 15/09/2026

TỪ KHÓA

Phương trình Euler-Lagrange;
Động cơ DC;
Tối thiểu hóa tổn thất nhiệt;
MATLAB;
SIMULINK.

TÓM TẮT

Bài báo xem xét việc tính toán dòng điện tối ưu trong cuộn dây phần ứng của động cơ dòng điện một chiều để có được tổn thất nhiệt là thấp nhất dựa trên Phương trình Euler-Lagrange một chiều được sử dụng để tìm kiếm điểm cực trị trong mô tả toán học của dòng điện phần ứng được trình bày. Sử dụng một động cơ dòng điện một chiều cụ thể để ứng dụng phương trình Euler-Lagrange tìm kiếm giá trị tối ưu của dòng điện phần ứng cho tổn thất nhiệt là thấp nhất., kết quả thu được là biểu thức tính giá trị dòng điện tối ưu phụ thuộc vào mô-men quán tính; mô-men cản; v.v. được dẫn ra. Chứng minh tính đúng và chính xác của phương pháp bằng cách mô hình hóa phương trình cơ học của truyền động điện được trình bày trong gói phần mềm MATLAB bằng cách sử dụng môi trường mô phỏng SIMULINK được trình bày. Cách tính toán trong MATLAB và trong SIMULINK theo phương pháp hình thang được đề xuất. Các kết quả mô phỏng thu được sự phù hợp của phương pháp đề xuất.

APPLYING THE EULER-LAGRANGE EQUATION TO SOLVE THE PROBLEM OF MINIMIZING POWER LOSS DUE TO HEAT IN THE ARMATURE OF A DC MOTOR

Tien Dung Nguyen[1*], Sy Hong Duc Nguyen[2]

[1]*Luong The Vinh University, 9 Cau Dong Street, Nam Dinh Ward, Ninh Binh Province, Viet Nam,*
[2]*Hanoi University of Science and Technology*
[*]*Corresponding Author: nguyentiendung@ltvu.edu.vn; tiendung.bmstu@bk.ru*

ARTICLE INFO

Received: Aug 16, 2026
Revised: Aug 26, 2026
Accepted: Sep 06, 2026
Published: Sep 15, 2026

KEYWORDS

Euler-Lagrange equation;
DC motor;
Heat loss minimization;
MATLAB;
Simulink.

ABSTRACT

This paper examines the calculation of the optimal current in the armature winding of a DC motor to minimize thermal losses. The approach utilizes the Euler-Lagrange equation—a method for identifying extrema—applied to the mathematical description of the armature current. By applying the Euler-Lagrange equation to a specific DC motor, the optimal armature current—which yields the lowest thermal losses—is determined. The resulting expression for the optimal current is derived as a function of parameters such as the moment of inertia and the load torque. The validity and accuracy of this method are demonstrated through the modeling of the mechanical equations of an electric drive system using the MATLAB/SIMULINK simulation environment. The computational procedure within MATLAB and SIMULINK is implemented using the trapezoidal method. The simulation results confirm the effectiveness of the proposed approach..

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Các động cơ dòng điện một chiều là nguồn động lực chính trong các hệ truyền động điện dòng điện một chiều thấp áp, các hệ truyền động điện này được sử dụng phổ biến nhất trên các trang thiết bị quân sự di động với nguồn nuôi là hệ thống máy điện và ắc quy. Thêm nữa, chúng hoạt động trong môi trường với điều kiện giải nhiệt tự nhiên rất hạn chế. Vì vậy, vấn đề tổn thất nhiệt trong cuộn dây phần ứng của các loại động cơ dòng điện một chiều là rất đáng quan tâm, một trong những bài toán cần giải cho vấn đề này là phải giải bài toán cực tiểu hóa tổn thất nhiệt trong phần ứng của chúng, qua đó giảm tổn thất điện năng; tăng độ bền và mô phỏng được các quá trình cần xem xét trong môi trường ảo. Các vấn đề này được xem xét trong bài báo.

2. MỤC TIÊU VÀ PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

2.1. MỤC TIÊU NGHIÊN CỨU

* Tìm nghiệm là dòng điện tối ưu trong cuộn dây phần ứng của bài toán cực tiểu hóa tổn thất nhiệt trong phần ứng động cơ dòng điện một chiều;

** Trực quan các quá trình tổn thất nhiệt và quá độ cần nghiên cứu trong động cơ dòng điện một chiều.

2.2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

* Sử dụng phương trình Euler-Lagrange mô tả trường nhiệt trong phần ứng của động cơ dòng điện một chiều để tính toán giá trị tối ưu của dòng điện phần ứng;

** Mô hình hóa phương trình cơ học (cân bằng mô-men) của hệ truyền động điện trong môi trường MATLAB và SIMULINK để thu được hình ảnh trực quan các quá trình tổn thất nhiệt và quá độ cần được xem xét của động cơ dòng điện một chiều.

3. NỘI DUNG VÀ KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

3.1. PHƯƠNG TRÌNH EULER-LAGRANGE MỘT CHIỀU

Phương trình Euler-Lagrange là các công thức cơ bản của phép tính biến phân, nó được sử dụng để tìm kiếm các điểm dừng và điểm cực trị của hàm số. Phương trình này được ứng dụng phổ biến trong các bài toán tối ưu hóa; trong vật lý lý thuyết; trong cơ học cổ điển; và hình học Riemann. Phương trình Euler-Lagrange được sử dụng để tìm kiếm điểm cực trị của hàm số.

Nhắc lại khái niệm hàm số

Giả định rằng, cho trước một số lớp M của hàm số $f(x)$. Nếu mỗi hàm $f(x)\in M$ có một quy luật nhất định được chỉ định tương ứng với con số xác định J, thì có thể nói rằng, hàm $J=J\left[f(x)\right]$ được xác định trong lớp M.

Thí dụ về hàm số được hiểu theo khái niệm này

Xét một tập hợp tất cả các đường cong phẳng có thể chỉnh hình dạng. Mỗi đường cong như vậy được gắn một con số nhất định — độ dài đường cong (chẳng hạn). Do đó, độ dài đường cong — một hàm số được xác định trên tập các đường cong có thể chỉnh hình dạng.

Giả sử, hàm $F(x,y,z)$ — hàm ba biến, khi đó biểu thức

$$J\left[f(x)\right]=\int_a^b F\left[x,f(x),f'(x)\right]dx \qquad (1)$$

là một hàm số, ở đây $f(x)$ — hàm tập hợp tất cả các hàm vi phân được xác định trong khoảng $[a,b]$ [3].

Nếu hàm $J\left[f(x)\right]$ đạt được cực trị trên một vài hàm $f(x)$ thi khi đó phương trình vi phân thông thường sau phải bằng 0

$$\frac{\partial F}{\partial f(x)}-\frac{d\partial f}{dx\partial f'(x)}=0, \qquad (2)$$

và phương trình này được gọi là phương trình Euler-Lagrange.

Hàm mục tiêu F cũng có thể phụ thuộc vào một số hàm; một số biến; và một số đạo hàm có bậc cao hơn.

3.2. TÍNH TOÁN GIÁ TRỊ DÒNG ĐIỆN PHẦN ỨNG TỐI ƯU

Xét bài toán: tìm kiếm hàm dòng điện phần ứng của động cơ dòng điện một chiều, mà trên hàm này xác định được tổn thất nhiệt trong mạch phần ứng là tối thiểu.

Giả sử:

a) Động cơ dòng điện một chiều được gia tốc từ tốc độ góc $\omega_0=900\text{rad/s}$ lên tốc độ góc $\omega_1=1000\text{rad/s}$ trong khoảng thời gian $T=10\text{s}$.

b) Động cơ dòng điện một chiều với các thông số: mô-men quán tính $G=0,27\text{kg}\cdot\text{m}^2$; hệ số điện từ đơn $k_{em}=0,5\text{V}\cdot\text{s}$; mô-men cản quy đổi về trục quay của động cơ $M_r=6\text{N}\cdot\text{m}$

Để giải bài toán tìm kiếm hàm dòng điện phần ứng được đặt ra, cần phải tìm một hàm dòng điện $i(t)$ sao cho tổn thất nhiệt Q là tối thiểu, tức là

$$Q=R\int_0^T i^2(t)\,dt\to\min, \qquad (3)$$

ở đây $R=\text{const}$ — điện trở mạch phần ứng của động cơ dòng điện một chiều.

Xác định dòng điện trong mạch phần ứng động cơ dòng điện một chiều

Để thực hiện, chúng tôi sẽ biểu diễn dòng điện phần ứng thu được từ phương trình cơ học của truyền động điện [4]

$$G\frac{d\omega}{dt}=k_{em}i(t)-M_r, \qquad (4)$$

ở đây G — mô-men quán tính của động cơ dòng điện một chiều; ω — tần số góc quay của động cơ dòng điện một chiều; k_{em} — hệ số điện từ đơn; M_r — mô-men cản.

Từ (4) suy ra phương trình dòng điện được viết như sau:

$$i(t)=\frac{G}{k_{em}}\left(\frac{d\omega}{dt}+\frac{M_r}{G}\right). \qquad (5)$$

Thay phương trình (5) vào biểu thức tích phân (3), chúng tôi thu được tổn thất nhiệt dưới dạng mô tả toán học là phép toán tích phân như sau:

$$Q=\frac{RG^2}{k_{em}^2}\int_0^T\left(\frac{d\omega}{dt}+\frac{M_r}{G}\right)^2dt. \qquad (6)$$

Vì hệ số trước dấu tích phân là hằng số, nên có thể loại bỏ. Khi đó, hàm J được chúng tôi viết ở dạng sau:

$$J(t,\omega)=\int_0^T\left(\frac{d\omega}{dt}+\frac{M_r}{G}\right)^2dt. \qquad (7)$$

Thiết lập phương trình Euler-Lagrange từ (2)

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{d\omega}{dt}+\frac{M_r}{G}\right)^2-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{\omega}}\left(\frac{d\omega}{dt}+\frac{M_r}{G}\right)^2\right]=0. \quad (8)$$

Vì

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{d\omega}{dt}+\frac{M_r}{G}\right)^2=0, \quad (9)$$

nên phương trình (8) có dạng

$$\frac{d^2\omega}{dt^2}=0. \quad (10)$$

Nghiệm của phương trình thu được (là tốc độ góc của động cơ dòng điện một chiều, được gọi là tốc độ tối ưu), được viết dưới dạng

$$\omega^*(t)=C_1t+C_2. \quad (11)$$

Tính đến các điều kiện biên, giá trị các hằng số C_1 và C_2 được tính

$$\begin{cases}\omega(0)=0+C_2=\omega_0\Rightarrow C_2=\omega_0;\\ \omega(T)=C_1T+C_2=\omega_1\Rightarrow C_1=\dfrac{\omega_1-\omega_0}{T}.\end{cases} \quad (12)$$

Thay biểu thức tính giá trị C_1 và C_2 vào nghiệm (11) của phương trình Euler-Lagrange

$$\omega^*(t)=\frac{\omega_1-\omega_0}{T}t+\omega_0. \quad (13)$$

Thay hàm tốc độ góc (13) vào biểu thức (5), thu được giá trị dòng điện tối ưu i^* được tính theo biểu thức sau:

$$i^*=\frac{G}{k_{em}}\left(\frac{\omega_1-\omega_0}{T}+\frac{M_r}{G}\right)=\frac{G(\omega_1-\omega_0)}{k_{em}T}+\frac{M_r}{k_{em}}. \quad (14)$$

Thay các giá trị số vào biểu thức này, thu được kết quả là dòng điện tối ưu trong cuộn dây phần ứng của động cơ dòng điện một chiều có giá trị 17,4A.

Như vậy, để bảo đảm tổn thất nhiệt trong phần ứng động cơ dòng điện một chiều là tối thiểu thì dòng điện cuộn dây phần ứng phải không đổi và bằng 17,4A.

3.3. MÔ HÌNH HÓA TRONG MATLAB VÀ SIMULINK

3.3.1. TRONG MATLAB

Tìm giá trị tối ưu của dòng điện cuộn dây phần ứng trong động cơ dòng điện một chiều sao cho tổn thất nhiệt trong nó là tối thiểu, bằng cách mô hình hóa phương trình cơ học trong môi trường MATLAB.

Giả sử rằng, sự biến đổi của đường cong $\delta\omega(t)$ tuân theo luật

$$\delta\omega(t)=\alpha\sin\left(\frac{3\pi t}{T}\right), \quad (15)$$

cực trị có dạng

$$\omega^*(t)=\frac{\omega_1-\omega_0}{T}t+\omega_0, \quad (16)$$

còn hàm mục tiêu của hàm (7) là biểu thức dạng

$$F(t,\alpha)=\left(\frac{d\omega}{dt}+\frac{M_r}{G}\right)^2. \quad (17)$$

Vì $\omega(t)=\omega^*(t)+\delta\omega(t)$, nên hàm F tính đến các biến thể sẽ có dạng

$$F(t,\alpha)=\left\{\frac{d}{dt}\left[\omega^*(t)+\delta\omega(t)\right]+\frac{M_r}{G}\right\}^2=$$

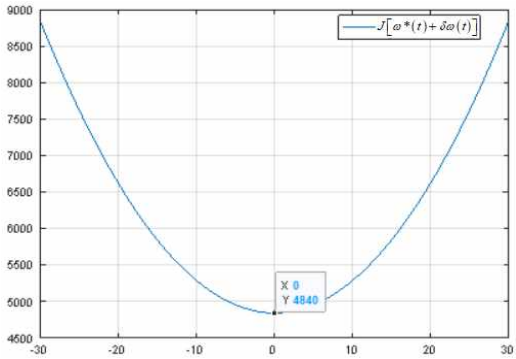
$$=\left[\frac{\omega_1-\omega_0}{T}+\frac{3\pi\alpha}{T}\cos\left(\frac{3\pi t}{T}\right)+\frac{M_r}{G}\right]^2. \quad (18)$$

Việc tính toán hàm (được định số ký hiệu là J (7)) được thực hiện bằng phương pháp hình thang (**Listing 1**). Việc tính toán hàm (được định số ký hiệu là J (7)) được thực hiện bằng phương pháp hình thang (Listing 1).

Listing 1

```
% integral calculation function
function [I] = Integrate(F, a, b)
n = size(F,2);
I = 0;
For I = 2:1:n-1
I = I+F(i);
end
I = (b-a)/(n-1)*(F(1)/2+F(n)/2+1);
end
% initial data
G = 0.27; % moment of inertia of the motor, kg*m^2
ke = 9.5; % unified electromagnetic coefficient, V*s/rad
Mr = 6; % moment of resistance, N*m
T = 10; % acceleration time, s
w0 = 900; % initial angular velocity, rad/s
w1 = 1000; % % final angular velocity, rad/s
n = 100; % number of points for plotting the graph
alpha = -30:1:30;
syms t
w_star = t.*(w1-w0)/T+w0; % extremum
delta_w = alpha.*sin(3.*pi.*t./T); % first variation
F = (diff(w_star+delta_w, t, 1) + Mr/G).^2; % objective function
% calculation of the integral
t = linspace(w0,w1,n);
for i = 1:1:size(F,2)
ifi ~ = ceil(size(alpha,2)/2
J(i) = Integrate(double(subs(F(i))), 0, T);
else
J(i) = Integrate(double(F(i)*ones(1,size(t,2))), 0, T);
end
end
% plotting a graph
plot(alpha, J);
```

Kết quả là chúng tôi thu được biểu đồ sự phụ thuộc của hàm $J\left[\omega^*(t)+\delta\omega(t)\right]$ vào tham số $\alpha=\dot{\omega}$ như **H. 1**.



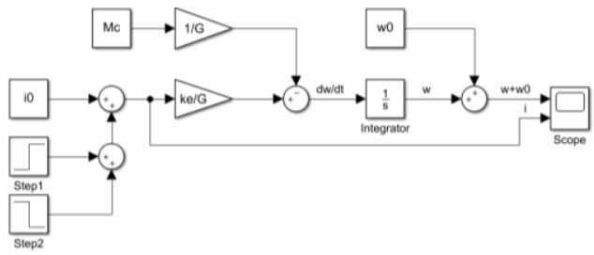
H. 1. *Sự phụ thuộc của hàm* $J\left[\omega^*(t)+\delta\omega(t)\right]$ *vào tham số*

Từ **H.1**, dễ thấy rằng, hàm (7) có giá trị tối thiểu tại $\alpha = 0$, tức tại hàm $\omega^*(t)$

$$\omega^*(t) = \frac{\omega_1 - \omega_0}{T} t + \omega_0. \quad (19)$$

3.3.2. TRONG SIMULINK

Chúng tôi thực hiện mô hình hóa hệ thống điều khiển động cơ điện trong SIMULINK. Sơ đồ mô hình hóa sự phụ thuộc của dòng điện phần ứng vào thời gian với dòng điện phần ứng không thay đổi là 12A ứng với mô-men cản là $6\text{N}\cdot\text{m}$ và tốc độ góc ban đầu không thay đổi là 900rad/s được thể hiện trên **H. 2**.



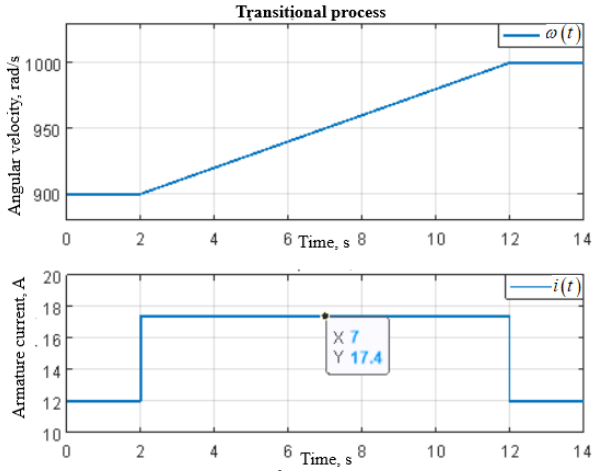
H. 2. *Sơ đồ mô hình hóa sự điều khiển cơ học của truyền động điện*

Viết đoạn mã trong MATLAB cho phép mô tả mạch điện và thiết lập các đồ thị của các quá trình quá độ của tốc độ góc và dòng điện phần ứng (**Listing 2**)

Listing 2

```
clear;
clc;
G = 0.27; % moment of inertia of the motor, kg*m^2
ke = 9.5; % unified electromagnetic coefficient, V*s/rad
Mr = 6; % moment of resistance, N*m
w0 = 900; % initial angular velocity, rad/s
i0 = 12; % initial armature current, A
out = sim('bdz1.slx'); % circuit simulation
figure;
subplot(2,1,1);
plot(out.tout, out.data.signals(1).values); % plotting a graph w(t)
legend('\omega(t)'); % legend
set(gca,'FontSize',12); % setting the font size
title('Transient processes'); % headline
xlabel('Time t, s'); % x-axis label
ylabel('Angular velocity\omega, rad/s'); % y-axis label
ylim([880, 1020]); % graph plotting limits on the ordinate axis
grid on; % enabling the grid
subplot(2,1,2);
plot(out.tout, out.data.signals(2).values); % plotting a graph i(t)
legend('j(t)');
set(gca,'FontSize',12);
xlabel('Time t, s');
ylabel('Armature current I, A')
ylim([10,20]);
grid on;
```

Kết quả mô hình hóa được trình bày trên **H. 3**.



H.3. *Sự phụ thuộc của tốc độ góc vào thời gian và của dòng điện vào thời gian*

4. THẢO LUẬN KẾT QUẢ

Kết quả tính giá trị dòng điện tối ưu trong cuộn dây phần ứng của động cơ điện dòng điện một chiều bằng cách sử dụng phương trình Euler-Lagrange để tìm giá trị tối ưu của dòng điện phần ứng, được tham chiếu với kết quả thu được từ mô hình hóa phương trình cơ học của hệ truyền động điện trong MATLAB, đã cho thấy độ chính xác của phương pháp.

Kết quả mô phỏng hệ thống cho thấy rằng, với dòng điện phần ứng cho trước và không đổi ở mức 12A và mô-men cản không đổi ở mức $6\text{N}\cdot\text{m}$ thì tốc độ góc của động cơ dòng điện một chiều là không thay đổi, còn khi ở giá trị tối ưu của dòng điện $17,4\text{A}$ thì tốc độ góc của động cơ dòng điện một chiều sẽ tăng lên một lượng 100rad/s sau 10s

Như vậy, để tăng tốc độ góc của động cơ với mong muốn tổn thất nhiệt trong phần ứng của động cơ là tối thiểu hóa thì nên điều khiển dòng điện phần ứng ở đúng giá trị tối ưu.

5. KẾT LUẬN

* Sử dụng phương trình Euler-Lagrange để mô tả quá trình nhiệt thông qua dòng điện phần ứng của động cơ dòng điện một chiều với kết quả là thu được hàm dòng điện tối ưu cho cực tiểu hóa tổn thất nhiệt trong phần ứng động cơ dòng điện một chiều, thông qua một động cơ dòng điện một chiều cụ thể, kết hợp kiểm tra bằng mô hình hóa trong MATLAB đã cho thấy tính hiệu quả của cách sử dụng phương trình này trong việc giải bài toán cực tiểu hóa tổn thất nhiệt.

** Tổn thất nhiệt trong phần ứng động cơ dòng điện một chiều sẽ mạnh nhất khi động cơ ở quá trình tăng tốc, để cực tiểu hóa tổn thất này thì cần phải để giá trị dòng điện phần ứng ở giá trị tối ưu.

6. TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Поникарова И.В. Элементы вариационного исчисления, Учебное пособие. — СПб.: СПбГУ, **2019**. — 50 с.

[2] Усольцев А. А. Электрический привод/Учебное пособие. СПб: НИУ ИТМО, **2012**, – 238 с.