e-ISSN: 3039 - 3145
Tạp chí Khoa học và Công nghệ Y khoa, 2026, 06, 096-102

PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP TUYẾN TÍNH HÓA ĐIỀU HÒA ĐỂ TÍNH TOÁN HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG PHI TUYẾN TÍNH

Nguyễn Tiến Dũng[1,2*], Molchanov I. A.[2], Babenkov Y. M.[2], Nguyễn Sỹ Hồng Đức[3]

[1]Trường Đại học Lương Thế Vinh, Số 9 Đường Cầu Đông, Phường Nam Định, tỉnh Ninh Bình, Việt Nam

[2]Đại học Kỹ thuật Quốc gia Samara, Liên bang Nga

[3]Đại học Bách khoa Hà Nội, Việt Nam

** Tác giả liên hệ: nguyentiendung@ltvu.edu.vn; tiendung.bmstu@bk.ru*

THÔNG TIN BÀI BÁO

Ngày nhận: 16/08/2026
Ngày hoàn thiện: 26/08/2026
Ngày chấp nhận: 06/09/2026
Ngày đăng: 15/09/2026

TỪ KHÓA

Hệ thống điều khiển tự động phi tuyến tính;
Hàm điều hòa;
Đặc tính tần số của hệ thống tuyến tính;
Đặc tính tần số của hệ thống phi tuyến tính;
Tuyến tính hóa điều hòa hệ thống phi tuyến tính.

TÓM TẮT

Bài báo xem xét phương pháp tuyến tính hóa điều hòa để tính toán hệ thống điều khiển tự động phi tuyến tính trong lý thuyết điều khiển. Mục đích nghiên cứu của công trình — nghiên cứu thuộc tính tần số của hệ thống điều khiển tự động phi tuyến tính. Thuật toán tính toán tham số của quá trình có tính chu kỳ được chứng minh. Hàm truyền đạt của phần tử phi tuyến tính của hệ thống điều khiển tự động phi tuyến tính được tìm ra bằng phương pháp tuyến tính hóa điều hòa với độ tin cậy và độ chính xác là chấp nhận được. Kết quả của công trình có thể ứng dụng tốt trong thiết kế hệ thống điều khiển tự động phi tuyến tính.

DEVELOPMENT OF A HARMONIC LINEARIZATION METHOD FOR THE ANALYSIS OF NONLINEAR AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS

Tien Dung Nguyen[1,2*], Molchanov I. A.[2], Babenkov Y. M.[2,] Sy Hong Duc Nguyen[3]

[1]Luong The Vinh University, 9 Cau Dong Street, Nam Dinh Ward, Ninh Binh Province, Viet Nam

[2]Samara State Technical University, Russian Federation

[3]Hanoi University of Science and Technology, Vietnam

** Corresponding Author: nguyentiendung@ltvu.edu.vn; tiendung.bmstu@bk.ru*

ARTICLE INFO

Received: Aug 16, 2026
Revised: Aug 26, 2026
Accepted: Sep 06, 2026
Published: Sep 15, 2026

KEYWORDS

Nonlinear automatic control system;
Harmonic function;
Frequency characteristics of linear systems;
Frequency characteristics of nonlinear systems;
Harmonic linearization of nonlinear systems.

ABSTRACT

This paper examines the harmonic linearization method for analyzing nonlinear automatic control systems. The study aims — investigate the frequency characteristics of such systems. An algorithm for calculating the parameters of the periodic process is demonstrated. The transfer function of the nonlinear element within the system is derived using the harmonic linearization method, yielding results with acceptable reliability and accuracy. The findings of this study can be effectively applied to the design of nonlinear automatic control systems.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Các hệ thống điều khiển tự động (*Automatic Control System — ACS*) thực tế, luôn tồn tại các phần tử mang tính cảm kháng; dung kháng vật lý — những phần tử phi tuyến tính, tức mối quan hệ giữa các đại lượng vật lý diễn ra trong chúng (thường xét quan hệ giữa các đại lượng đầu ra/đầu vào) là mối quan hệ phi tuyến tính. Vì vậy, trong các bài toán lý thuyết điều khiển ứng dụng thì luôn gặp các phần tử toán học phi tuyến tính và việc giải các bài toán phi tuyến tính — mô hình toán học của *ACS*, luôn là một việc khó khăn, ngay cả hiện nay đã có sự trợ giúp của công nghệ computer và các phần mềm chuyên dụng. Một cách gần đúng với kết quả chấp nhận được là khi giải bài toán phi tuyến tính của các *ACS* thì luôn phân tích các phần tử phi tuyến tính tương tự như phần tử tuyến tính (để sử dụng hàm truyền đạt của phần tử tuyến tính trong thiết kế-khảo sát chất lượng của *ACS* phi tuyến tính) bằng phương pháp tuyến tính hóa điều hòa.

Vấn đề nghiên cứu phát triển phương pháp tuyến tính hóa điều hòa cho *ACS* phi tuyến tính vẫn luôn là một vấn đề mở, mỗi kết quả mới của nghiên cứu phát triển này luôn được ứng dụng trong thiết kế mới của các *ACS*.

Bài viết này trình bày kết quả phát triển việc tính toán *ACS* phi tuyến tính bằng phương pháp tuyến tính hóa điều hòa với mục tiêu tìm được hàm truyền đạt của phần tử phi tuyến tính mang tính ứng dụng cao trong thiết kế *ACS* phi tuyến tính`.

2. MỤC TIÊU VÀ PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

2.1. MỤC TIÊU NGHIÊN CỨU

* Xem xét vấn đề tuyến tính hóa điều hòa trong *ACS* phi tuyến tính;

** Tìm thuật toán tính toán các tham số của các quá trình chu kỳ;

*** Ứng dụng kết quả thu được về hàm truyền đạt của phần tử phi tuyến tính để thiết kế các *ACS* phi tuyến tính.

2.2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

* Sử dụng sơ đồ cấu trúc điển hình của *ACS* phi tuyến tính để đặt ra bài toán điển hình;

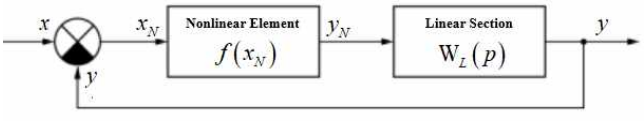
** Xem xét giải bài toán điển hình bằng phương pháp tuyến tính hóa điều hòa, lấy thành phần số hạng thứ nhất của chuỗi *Fourier*;

*** Giải bài toán điển hình với hơn một cách giải để chứng minh kết quả có tính chính xác và độ tin cậy cao.

3. NỘI DUNG VÀ KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

3.1. ACS PHI TUYẾN TÍNH VÀ ĐẶT BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Cấu trúc *ACS* phi tuyến tính điển hình ở dạng nối tiếp trong mạch thẳng có hai khâu: khâu phi tuyến tính với mô tả toán học là hàm $f(x_N)$ và khâu tuyến tính với hàm truyền đạt $W_L(p)$, có dạng như **H. 1**.

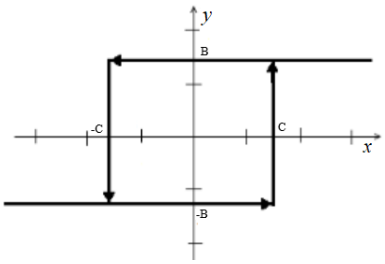


Hình 1a. *Sơ đồ cấu trúc của ACS phi tuyến tính điển hình*

Trên đầu vào của *ACS* phi tuyến tính (**Hình 1**) được đặt một dao động điều hòa $x(t)$ với dạng

$$x(t) = a\sin(\omega t). \quad (1)$$

Đặc tính tĩnh của phần tử phi tuyến tính được trình bày trên **H. 2**.

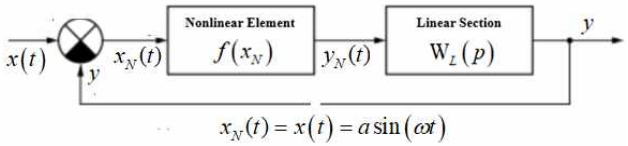


Hình 2. *Đặc tính tĩnh của phần tử phi tuyến tính*

Giả định rằng, phần tuyến tính của hệ thống có quán tính đủ lớn và do đó không truyền sóng hài tần số cao qua nó. Khi đó, phần tử phi tuyến tính — *Nonlinear Element* (*NE*) có thể được thay thế bằng phần tử tuyến tính với đặc tính tần số của nó sẽ phụ thuộc vào biên độ của tín hiệu đầu vào [1].

Để dao động điều hòa (1) đặt lên đầu vào của phần tử phi tuyến có tác dụng hữu ích khi nghiên cứu thì mạch vòng phản hồi kín của *ACS* phi tuyến tính (**H. 1a**) phải ở trạng thái hở mạch (**H. 1b**), và khi đó

$$x_N(t) = x(t) = a\sin(\omega t). \quad (2)$$



Hình 1b. *Sơ đồ cấu trúc của ACS điển hình khi hở mạch vòng phản hồi để phần tử phi tuyến tính với tác động điều hòa lên đầu vào*

Với phân tích trên, chúng tôi đặt bài toán điển hình cho phần tử phi tuyến tính của *ACS* phi tuyến tính: xem xét dạng tín hiệu $y_N(t)$ ở đầu ra của phần tử phi tuyến tính khi tác động đầu vào của nó là dao động điều hòa $x_N(t)$ (1).

3.2. GIẢI BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Tín hiệu $y_N(t)$ trên đầu ra của phần tử phi tuyến tính khi có tác động hình sin thì có thể được trình bày dưới dạng tổng quát:

$$y_N(t) = f\left[x_N(t), x'_N(t)\right] = f\left[a\sin(\omega t), a\omega\cos(\omega t)\right]. \quad (3)$$

Dạng tổng quát (3) được định cho ACS sẽ phải thêm các điều kiện sau (4) để trở thành một công cụ toán học phân tích chính xác cho tín hiệu $y_N(t)$:

Các điều kiện cho (3):

$$\begin{cases} x_N(t) = a\cdot\sin\omega t \\ a \geq c \end{cases}, \quad (4)$$

Ở đây $+C$; $-C$ — các điểm chuyển đổi theo trục $0x$. Điều này có nghĩa rằng, các giá trị cực đoan của $x_N(t)$ trong khoảng $(+C \div -C)$ là không quan sát được. Khi này, độ trễ có thể được trình bày bằng toán học ở dạng quan hệ (5) và (6) như sau:

$$y(x,\ x') = b\cdot\text{sign}\left[x - \text{sign}(x')\cdot c\right]. \quad (5)$$

$$y(t) = y(a\sin\omega t,\ a\omega\cos\omega t) = b\cdot\text{sign}\left[a\cdot\sin\omega t - \text{sign}(a\omega\cos\omega t)\cdot c\right] = b\cdot\text{sign}\left[a\sin\omega t - \text{sign}(\cos\omega t)\cdot c\right]. \quad (6)$$

Rõ ràng rằng, đường (6) là một dạng phân loài của đường uốn khúc. Việc quan trọng còn lại chỉ là tính toán các thời điểm chuyển đổi $\left[y(t)=0\right]$, tức có:

$$b\cdot\text{sign}\left[a\cdot\sin\omega t-\text{sign}(\cos\omega t)\cdot c\right]=0, \quad (7)$$

Tức có

$$a\cdot\sin\omega t-\text{sign}\left(\cos\omega t\right)\cdot c=0, \quad (8)$$

Suy ra:

$$\sin\omega t=\text{sign}(\cos\omega t)\cdot\frac{c}{a}\ , \quad (9)$$

Với điều kiện $\frac{c}{a}\le 1$, tức $a\ge c$.

Từ phân tích trên, rút ra được một tập hai giải pháp sau:

$$\begin{cases}\omega t=\ \ \arcsin\left[\text{sign}\left(\cos\omega t\right)\cdot\frac{c}{a}\right]+2\pi n\\ \omega t=\pi-\arcsin\left[\text{sign}\left(\cos\omega t\right)\cdot\frac{c}{a}\right]+2\pi n\end{cases}. \quad (10)$$

Hàm arcsin — phi tuyến tính, bởi vậy có thể chuyển đổi tập hai giải pháp trên với arcsin thành sign như sau:

$$\begin{cases}\omega t=\ \ \text{sign}\left(\cos\omega t\right)\cdot\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)+2\pi n\\ \omega t=\pi-\text{sign}\left(\cos\omega t\right)\cdot\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)+2\pi n\end{cases}. \quad (11)$$

Tập hai giải pháp nêu trên sẽ có kết quả tương ứng với hai trường hợp khác nhau.

3.2.1. TRƯỜNG HỢP THỨ NHẤT

Là trường hợp thỏa điều kiện

$$\cos\omega t>0\Rightarrow-\frac{\pi}{2}+2\pi n<\omega t<\frac{\pi}{2}+2\pi n, \quad (12)$$

Với điều kiện này, thấy ngay hai kết quả

$$\text{a)}\ \omega t=\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)+2\pi n\Rightarrow \quad (13)$$

Thời điểm hàm $y(t)=0$ là

$$t=\frac{1}{\omega}\left[\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)+2\pi n\right]; \quad (14)$$

$$\text{b)}\ \ \omega t=\pi-\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)+2\pi n\Rightarrow\varnothing, \quad (15)$$

Bởi vì

$$\begin{aligned}&\arcsin\in\left[-\frac{\pi}{2}\div+\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\\ &\Rightarrow\pi-\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)+2\pi n\notin\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\div+\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\end{aligned} \quad (16)$$

3.2.2. TRƯỜNG HỢP THỨ HAI

Là trường hợp thỏa điều kiện

$$\cos\omega t<0\Rightarrow+\frac{\pi}{2}+2\pi n<\omega t<\frac{3\pi}{2}+2\pi n \quad (17)$$

Và có kết quả

$$\text{a)}\ \omega t=-\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)+2\pi n\Rightarrow\varnothing \quad (18)$$

Bởi vì

$$\begin{aligned}&\arcsin\in\left[-\frac{\pi}{2}\div+\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\\ &\Rightarrow-\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)+2\pi n\notin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\div\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right).\end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{b)}\ \omega t=\pi+\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)+2\pi n\Rightarrow \quad (20)$$

Thời điểm hàm $y(t)=0$ là

$$t=\frac{1}{\omega}\left[\pi+\arcsin\left(\frac{c}{a}+2\pi n\right)\right]. \quad (21)$$

Chúng tôi kết hợp các giải pháp, rút ra các thời điểm chuyển đổi, mà tại các thời điểm đó $y(t)=0$ là

$$t=\frac{1}{\omega}\left[\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)+\pi n\right]. \quad (22)$$

3.3. KIỂM TRA TÍNH CHÍNH XÁC CỦA 3.2

Chúng tôi kiểm tra độ chính xác của cách giải nêu ở tiểu mục **3.2** bằng việc: kiểm tra xem biểu thức (8) với điều kiện bỏ vế phải sẽ được gọi là hàm $f(t)$:

$$f(t)=a\sin\omega t-\text{sign}\left(\cos\omega t\right)\cdot c, \quad (23)$$

Tại các điểm theo (22) thì hàm này có thay đổi dấu hay không? (không đơn giản là tại các thời điểm đó thì hàm này hoặc =0 hoặc tiến tới 0).

Để thực hiện kiểm tra có hay không sự thay đổi dấu của hàm này tại các thời điểm tính theo (22), chúng tôi xét dấu đạo hàm của hàm này, xem có thay đổi tại các thời điểm (22) hay không? (tương ứng là hướng chuyển động của hàm này — giảm hay tăng).

Việc kiểm tra được chúng tôi thực hiện theo hai cách khác nhau và đối chiếu với nhau về kết quả để cho ra kết luận có tính thuyết phục cao nhất.

3.3.1. CÁCH KIỂM TRA THỨ NHẤT

Lấy đạo hàm bậc một cho hàm (23):

$$\begin{aligned}&f'(t)=\left[a\sin\omega t-\text{sign}\left(\cos\omega t\right)\cdot c\right]'=\\ &=a\omega\cos\omega t+2\omega c\cdot\delta\left(\cos\omega t\right)\cdot\sin\omega t=\\ &=\omega\left[a\cos\omega t+2c\cdot\delta\left(\cos\omega t\right)\cdot\sin\omega t\right].\end{aligned} \quad (24)$$

Cho $f'(t)=0$

$$\begin{aligned}&a\cos\omega t+2c\cdot\delta\left(\cos\omega t\right)\cdot\sin\omega t=0\\ &\Rightarrow a\cos\omega t=-2c\cdot\delta\left(\cos\omega t\right)\cdot\sin\omega t\end{aligned} \quad (25)$$

Hàm Delta $\delta(z)$ bằng 0 ở mọi điểm, ngoại trừ những điểm, mà ở đó

$$z=\cos\omega t=0 \quad (26)$$

(Tức hàm $\delta(z)$ có giá trị bằng $+\infty$), cụ thể là chỉ tại những điểm này thì phần vế trái của (25) được quay về giá trị 0. Việc giải là không thể, tức không có nghiệm, đồng nghĩa là hàm Delta không có cực trị theo nghĩa truyền thống của toán học, kể cả những cực trị (được hiểu là phải có) khi $f'(t)=0$

3.3.2. CÁCH KIỂM TRA THỨ HAI

Chúng tôi chứng minh tính chất đổi dấu của hàm số (23)

$$f(t)=a\sin\omega t-\text{sign}\left(\cos\omega t\right)\cdot c. \quad (27)$$

Để chứng minh được tính chất đổi dấu của hàm số này, thay vì tìm cách giải, chúng tôi thay thế biến t bằng dãy điểm $\frac{\pi n}{\omega}$, việc thay thế này là hợp lý, vì điều này được đảm bảo bởi bất đẳng thức $\frac{\pi n}{\omega} < t$, đúng vì

$$f\left(\frac{\pi n}{\omega}\right) = a\sin\omega\frac{\pi n}{\omega} - \text{sign}\left(\cos\omega\frac{\pi n}{\omega}\right)\cdot c = a\sin\pi n - c\text{sign}\left(\cos\pi\right)n = .$$
$$= \begin{bmatrix} n = 2m: \ a\sin 2\pi m - csign\left(\cos 2\pi m\right) = -c \\ n = 2m+1: \ \text{asin}\left[\pi\left(2m+1\right)\right] - csign\left\{\cos\left[\pi\left(2m+1\right)\right]\right\} = c \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Từ biểu thức này, rõ ràng rằng, dấu của hàm $f\left(t\right)$ được thay đổi, tùy thuộc vào giá trị báo cáo n. Hàm sẽ mang dấu + khi $n = 2m+1$; mang dấu âm khi $n = 2m$.

Tương ứng, hàm tín hiệu đầu ra $y_N(t)$ (6) của phần tử phi tuyến tính

$$y_N(t) = b\cdot\text{sign}\left[a\sin\omega t - \text{sign}\left(\cos\omega t\right)\cdot c\right] \quad (30)$$

sẽ là hàm khúc khuỷu (hàm *meander*).

Công thức tổng quát của hàm khúc khuỷu với độ lệch φ (*displacement*), có dạng

$$y(t) = b\cdot\text{sign}\left[\sin\left(\omega t - \varphi\right)\right]. \quad (31)$$

Để xác định giá trị của tần số và độ lệch, chúng tôi viết:

$$\sin\left(\omega t - \varphi\right) = 0 \Rightarrow \omega t - \varphi = \pi n \Rightarrow t = \frac{\pi n + \varphi}{\omega}. \quad (32)$$

So sánh với các cách giải đã trình bày trước đó, cuối cùng chúng tôi thu được kết quả sau:

$$y_N\left(t\right) = b\cdot sign\left\{\sin\left[\omega t - \arcsin\left(\frac{c}{a}\right)\right]\right\}. \quad (33)$$

Tức là, có sự khúc khuỷu với độ lệch

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{c}{a}\right) \quad (34)$$

và với hệ số lấp đầy 50% .

Tiếp tục, chúng tôi khai triển tín hiệu chu kỳ (33) thành chuỗi *Fourier* (tương tự như trong [2]) và chỉ sử dụng thành phần đầu tiên của chuỗi:

$$y_N\left(t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos\left(k\omega_1 t\right) + b_k\sin\left(k\omega_1 t\right)\right], \quad (35)$$

ở đây

$\omega_1 = 2\pi / T$ — tần số của sóng hài thứ nhất;

T — chu kỳ của tín hiệu đầu vào $x_N\left(t\right)$;

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T y_N\left(t\right)\cos\left(k\omega_1 t\right)dt, \ k = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots; \quad (36)$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T y_N\left(t\right)\sin\left(k\omega_1 t\right)dt, \ k = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots. \quad (37)$$

Bởi vì biên độ của sóng hài thứ nhất y_{N1} lớn hơn đáng kể so với biên độ của sóng hài y_{Nk} thứ hai; ba; ... và phần tuyến tính của hệ thống *ACS* phi tuyến tính có thuộc tính như bộ lọc tần số thấp, nên tín hiệu $y_N\left(t\right)$ ở công thức (35) (cũng là mô tả toán học của đặc tính tĩnh của bộ lọc thông thấp) có thể được trình bày dưới dạng gần đúng sau [3]:

$$y_N\left(t\right) \approx \frac{a_0}{2} + a_1\cos\left(\omega t\right) + b_1\sin\left(\omega t\right). \quad (38)$$

Chúng tôi tính các giá trị a_0; a_1; b_1:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y_N\left(\tau\right)d\tau. \quad (39)$$

Dễ hiểu là, vì hàm $y_N\left(t\right)$ (35) là đường cong khúc khuỷu và có hệ số lấp đầy 50%, nên trong phân đoạn thời gian bất kỳ nào có độ dài trong chu kỳ đúng bằng một nửa chu kỳ của nó thì giá trị của $y_N\left(t\right)$ sẽ là +1, và trong nửa chu kỳ còn lại thì $y_N\left(t\right)$ sẽ lấy giá trị -1. Do đó, giá trị a_0 được tính bởi tích phân xác định nêu trên sẽ bằng 0.

Nhưng, để chắc chắn, chúng tôi kiểm tra lại:

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} b\cdot\text{sign}\left\{\sin\left[\omega\tau - \arcsin\left(\frac{c}{a}\right)\right]\right\}d\tau = \left|\begin{matrix}\omega\tau = \varphi \\ d\tau = d\left(\frac{\psi}{\omega}\right) = \frac{d\psi}{\omega}\end{matrix}\right| = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} b\cdot\text{sign}\left\{\sin\left[\psi - \arcsin\left(\frac{c}{a}\right)\right]\right\}d\psi =$$

$$= \frac{b}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)-\pi}\text{sign}\left\{\sin\left[\psi - \arcsin\left(\frac{c}{a}\right)\right]\right\}d\psi + \int_{\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)-\pi}^{\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)}\text{sign}\left\{\sin\left[\psi - \arcsin\left(\frac{c}{a}\right)\right]\right\}d\psi + \int_{\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)}^{\pi}\text{sign}\left\{\sin\left[\psi - \arcsin\left(\frac{c}{a}\right)\right]\right\}d\psi\right\} =$$

$$= \frac{b}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)-\pi} 1d\psi + \int_{\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)-\pi}^{\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)} -1d\psi + \int_{\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)}^{\pi} 1d\psi\right] =$$

$$= \frac{b}{\pi}\left[\arcsin\left(\frac{c}{a}\right) - \pi + \pi - \arcsin\left(\frac{c}{a}\right) + \arcsin\left(\frac{c}{a}\right) - \pi + \pi - \arcsin\left(\frac{c}{a}\right)\right] = 0. \quad (40)$$

Như vậy, $a_0 = 0$, đúng cho mọi trường hợp. Điều cần chứng minh đã được chứng minh.

Tiếp theo là tính giá trị a_1; b_1.

Giá trị a_1:

$$a_1 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y_N(\tau)\cos\omega\tau d\tau = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} b\cdot sign\left\{\sin\left[\omega\tau - \arcsin\left(\frac{c}{a}\right)\right]\right\}\cos\omega\tau d\tau =$$

$$= \left|\begin{array}{c}\omega\tau = \psi \\ d\tau = d\left(\frac{\psi}{\omega}\right) = \frac{d\psi}{\omega}\end{array}\right| = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} b\cdot\text{sign}\left\{\sin\left[\psi - \arcsin\left(\frac{c}{a}\right)\right]\right\}\cos\psi d\psi =$$

$$= \frac{b}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)-\pi} \text{sign}\left\{\sin\left[\psi - \arcsin\left(\frac{c}{a}\right)\right]\right\}\cos\psi d\psi + \int_{\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)-\pi}^{\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)} \text{sign}\left\{\sin\left[\psi - \arcsin\left(\frac{c}{a}\right)\right]\right\}\cos\psi d\psi + \right.$$

$$\left. + \int_{\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)}^{\pi} \text{sign}\left\{\sin\left[\psi - \arcsin\left(\frac{c}{a}\right)\right]\right\}\cos\psi d\psi\right\} = \int_{-\pi}^{\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)-\pi} \cos\psi d\psi + \int_{\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)-\pi}^{\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)} -\cos\psi d\psi + \int_{\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)}^{\pi} \cos\psi d\psi =$$

$$= \int_{-\pi}^{\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)-\pi} \cos\psi d\psi + \int_{\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)-\pi}^{\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)} -\cos\psi d\psi + \int_{\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)}^{\pi} \cos\psi d\psi =$$

$$= \frac{b}{\pi}\left\{-\sin\left[-\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)+\pi\right] - \sin(-\pi) - \sin\left[\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)\right] - \sin\left[-\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)+\pi\right] + \sin\pi - \sin\left[\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)\right]\right\} =$$

$$= -\frac{b}{\pi}\left(\frac{c}{a} + 0 + \frac{c}{a} + \frac{c}{a} - 0 + \frac{c}{a}\right) = -\frac{4bc}{\pi a}. \qquad (41)$$

Lưu ý rằng,

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha};\ \alpha = \arcsin\beta \Rightarrow \cos(\arcsin\beta) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin\beta)} = \sqrt{1-\beta^2} \qquad (42)$$

Chúng tôi tính giá trị b_1:

$$b_1 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y_N(\tau)\sin\omega\tau d\tau = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} b\cdot\text{sign}\left\{\sin\left[\omega\tau - \arcsin\left(\frac{c}{a}\right)\right]\right\}\sin\omega\tau d\tau =$$

$$= \left|\begin{array}{c}\omega\tau = \psi \\ d\tau = d\left(\frac{\psi}{\omega}\right) = \frac{d\psi}{\omega}\end{array}\right| = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} b\cdot\text{sign}\left\{\sin\left[\psi - \arcsin\left(\frac{c}{a}\right)\right]\right\}\sin\psi d\psi =$$

$$= \frac{b}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)-\pi} sign\left\{\sin\left[\psi - \arcsin\left(\frac{c}{a}\right)\right]\right\}\sin\psi d\psi + \int_{\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)-\pi}^{\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)} \text{sign}\left\{\sin\left[\psi - \arcsin\left(\frac{c}{a}\right)\right]\right\}\sin\psi d\psi + \right.$$

$$\left. + \int_{\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)}^{\pi} \text{sign}\left\{\sin\left[\psi - \arcsin\left(\frac{c}{a}\right)\right]\right\}\sin\psi d\psi\right\} = \int_{-\pi}^{\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)-\pi} \sin\psi d\psi + \int_{\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)-\pi}^{\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)} -\sin\psi d\psi + \int_{\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)}^{\pi} \sin\psi d\psi =$$

$$= \frac{b}{\pi}\left\{-\cos\left[-\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)+\pi\right] + \cos(-\pi) + \cos\left[\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)\right] - \cos\left[-\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)+\pi\right] - \cos\pi + \cos\left[\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{b}{\pi}\left\{2\cos\left[\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)\right] + 2\cos\left[\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)\right]\right\} = \frac{4b}{\pi}\cdot\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}. \qquad (43)$$

Tóm lại, thu được các giá trị sau:

$$a_0 = 0;\ a_1 = -\frac{4bc}{\pi a};\ b_1 = \frac{4b}{\pi}\cdot\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}\ . \quad (44)$$

Với các giá trị (44) thì hàm (38) sẽ có dạng sau:

$$y_N(t) \approx a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t). \quad (45)$$

Lấy đạo hàm bậc một cho tác động dao động điều hòa đầu vào (1):

$$x_N(t) = a\sin(\omega t) \Rightarrow x'_N(t) = a\omega\cos(\omega t). \quad (46)$$

Chúng tôi đặt các ký hiệu:

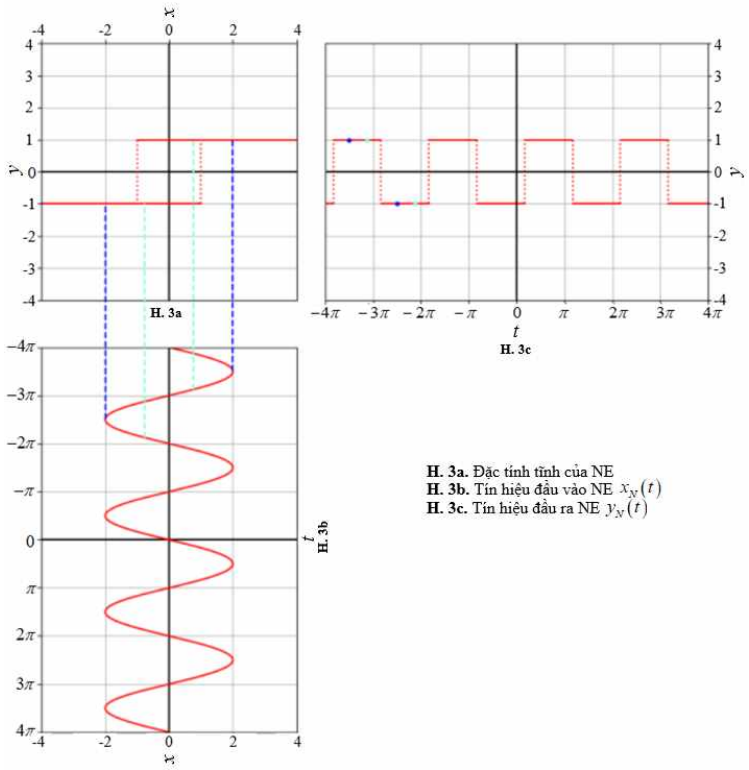
$$q(a) = \frac{b_1}{a} = \frac{4b}{\pi a}\cdot\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}; \quad (47)$$

$$q_1(a) = \frac{a_1}{a} = -\frac{4bc}{\pi a^2}. \quad (48)$$

Từ (45); (46); (47); và (48), chúng tôi thu được:

$$y_N(t) \approx q(a)\cdot x_N(t) + \frac{q_1(a)}{\omega}\cdot x'_N(t). \quad (49)$$

Các biểu đồ dao động đầu vào $x_N(t)$ và đầu ra $y_N(t)$ của phần tử phi tuyến tính được trình bày trên **H. 3**.



Hình 3. Đặc tính tĩnh của phần tử phi tuyến tính và biểu đồ dao động của tín hiệu đầu vào và đầu ra của nó

Đến đây, chúng tôi suy ra biểu thức cho hàm truyền đạt tương đương $W_N(p, a)$ của phần tử phi tuyến tính trong *ACS* phi tuyến tính. Chúng tôi viết được ở dạng toán tử cho công thức (31) như sau:

$$y_N(p) \approx q(a)\cdot x_N(p) + \frac{q_1(a)}{\omega}\cdot p x_N(p), \quad (50)$$

Thực hiện phép chia $y_N(p)$ cho $x_N(p)$, chúng tôi thu được hàm truyền đạt của phần tử phi tuyến tính:

$$W_N(p, a) = \frac{y_N(p)}{x_N(p)} = q(a) + \frac{q_1(a)}{\omega}\cdot p. \quad (51)$$

Như vậy, hàm truyền đạt tương đương của phần tử phi tuyến tính có mô tả toán học là (35), cuối cùng có dạng đầy đủ như sau:

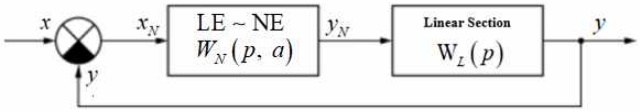
$$W_N(p, a) = \frac{4b}{\pi a}\cdot\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}} - \frac{4bc}{\pi a^2}\cdot\frac{p}{\omega} = \frac{4b}{\pi a}\left(\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}} - \frac{c}{a}\cdot\frac{p}{\omega}\right). \quad (52)$$

4. THẢO LUẬN KẾT QUẢ

Với kết quả tìm kiếm hàm truyền đạt của phần tử phi tuyến tính — biểu thức (52), cho thấy:

* Quá trình nghiên cứu phát triển phương pháp tuyến tính hóa điều hòa để tính toán *ACS* phi tuyến tính cho ra kết quả (52), có thể được coi là rất thuyết phục;

** Việc sử dụng kết quả này là một cách tiếp cận mới để thiết kế hệ thống *ACS* phi tuyến tính là chấp nhận được về độ tin cậy, độ chính xác, *ACS* phi tuyến tính như **Hình 1a** được thay thế tương đương bằng *ACS* tuyến tính hóa như **Hình 4**.



Hình 4. Sơ đồ cấu trúc ACS phi tuyến tính được tuyến tính hóa

Từ **Hình 4** dễ dàng thấy rằng, hoàn toàn áp dụng các phương pháp tính toán cho *ACS* tuyến tính vào *ACS* phi tuyến tính, đặc biệt là phương pháp đặc tính tần số;

*** Việc sử dụng kết quả này để thực hiện khảo sát động học các hệ *ACS* phi tuyến tính có thực trên thực tế nhằm đánh giá lại toàn bộ chất lượng hiện tại của chúng và đưa ra phương án khôi phục chất lượng hoặc cải thiện chất lượng của chúng có cơ sở khoa học là rất thuyết phục;

**** Sử dụng kết quả này trong quá trình đào tạo nhân lực cao của ngành công nghệ Điện-Điện tử là rất hữu ích về "huấn luyện" tư duy cho người học và trang bị một công cụ "mới" để hành nghề.

5. KẾT LUẬN

Việc đặt bài toán điển hình cho *ACS* phi tuyến tính với nội dung tính toán *ACS* phi tuyến tính bằng phương pháp tuyến tính hóa điều hòa, có thể cho rằng, đó là cách tiếp cận "mói" đủ độ tin cậy và độ chính xác.

Cách giải bài toán điển hình bằng các cách khác nhau để kiểm chứng kết quả với những giả định gần đúng, cho thấy: kết quả cuối cùng tìm được là hàm truyền đạt của phần tử phi tuyến tính có đủ độ tin cậy và độ chính xác.

Với kết quả cuối cùng là biểu thức (52) dễ dàng sử dụng các phương pháp truyền thống trong lý thuyết điều khiển tự động để thực hiện các công việc nghiên cứu-thiết kế mới hoặc khảo sát chất lượng của các hệ *ACS* phi tuyến tính cũ.

Với việc khai triển theo chuỗi *Fourier* cho (33) và lấy thành phần sóng hài điều hòa thứ nhất để xem xét tính đúng của kết luận của bài toán điển hình, đã cho thấy độ chính xác "gần như tuyệt đối" của việc tìm kiếm (52).

6. TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Зайцев Г. Ф. Теория автоматического управления и регулирования. — 2-е изд., перераб. и доп. — К.: Быща Школа. Головное изд-во, **1989**. — 431 с.

[2] Демкин В. И. Курс лекций по НСУ. Лекция 2. Гармоническая линеаризация [Электронный ресурс] / В. И. Демкин. — Москва: МИЭТ, **2026**. — 8 с. (дата обращения: 16.03.**2026**).

[3] Попов Е. П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления: Учеб. пособие. — 2-е изд., стер. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., **1988**. —256 с— ISBN 5–02–013903–3.

[4] Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов: справочник / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. — Санкт-Петербург: Лань, **2010**. — 608 с. — ISBN 978–5–8114–0906–8.